

<研究ノート>

数式処理システムと経済学学習

——商用ソフトからフリーソフトウェア *Maxima* へ——

河 合 勝 彦

目次

- 1 はじめに
- 2 経済学学習と数式処理ソフト
- 3 経済学における数式処理ソフトの活用：サーベイ
- 4 商用ソフトから *Maxima* へ
 - 4.1 *Maxima* とは
 - 4.2 実例：消費者理論
 - 4.3 ユーザビリティ
- 5 まとめと課題
- A *Maxima* の入手およびインストール方法
 - A.1 入手方法
 - A.2 動作環境およびインストール方法

はじめに

本稿は数式処理 (formula manipulation)¹⁾ システムの経済学分野での活用法について概観する。ただし、経済学研究のフロンティアにおいて、いかに数式処理ソフト²⁾ を利用するかといった問題は本稿のレベルを越えている。むしろ、経済学を学ぼうとする学部生、および経済系大学院修士レベルの学生

1) 現在では計算機代数(computer algebra) という呼び方もよく使われている。

2) 以下、本稿では、文脈に応じて「数式処理システム」と「数式処理ソフト」という単語を使っているが、同義のものとして扱っていることに注意されたい。

キーワード：数式処理システム，経済学学習，*Maxima*

が、どのように数式処理ソフトを効率的に活用できるかについて考察することを目的としたい。

数式処理ソフトとは、数式の解析を主目的として利用されるコンピュータソフトウェアを指す。もちろん、モデルが小規模であり、かつ処理速度を重要視しないのならば、数値的な計算も十分可能である³⁾

本稿の構成は以下の通りである。まず第2章では、経済学学習における数式処理ソフト利用の意義を概観する。続く第3章では、数式処理ソフトがいままでどのように経済学学習に利用されてきたかを、既存の代表的な出版物を参考にしながら、簡単にサーベイする。さらに第4章では、フリーソフトウェア⁴⁾である *Maxima* の簡単な紹介と、*Maxima* を利用して実際にどのように経済学的な分析をおこなうことができるかということを簡単な消費者理論からの例を利用して説明する。最終章ではまとめと展望をおこなう。さらに、付録では *Maxima* の入手方法とインストール方法について簡単に解説する。

2 経済学学習と数式処理ソフト

Varian[47]編著による *Economic and Financial Modeling with Mathematica*⁵⁾ は、経済学分野における数式処理ソフトの活用法を扱った、おそらく初めての研究叢書である。この書物の巻頭言において、Varian は以下のように経済学教育における数式処理ソフトの意義を述べている。

I think that Mathematica has the potential to change the way that we teach

3) 具体的な応用例としては、Kawai[21]がある。なお、大規模かつ複雑な数値計算を主目的としたソフトウェア（例、Octave[32]、Scilab[38]等）の利用例についてまた別の機会にそのサーベイをおこないたい。

4) フリー（自由）とは、ソフトウェアのソースが公開されており、誰でも自由に改変することができるという意味で使用している。これは必ずしもそのソフトウェアが無料（for free）ということとは意味していないが、ネットワーク接続料を無視すれば、*Maxima* は無料で入手することが可能である。

5) Mathematica は Wolfram Research[50]により開発されている数式処理ソフトである。教育現場における数式処理ソフトの利用率のシェアでは、おそらくトップを誇るものと思われる。

economics. It is widely recognized that economics students come to graduate school poorly prepared in mathematics. Perhaps the physical capital of computers can substitute for this lack of human capital. By lowering the cost of doing mathematical analysis, Mathematica encourages students to do more of it. Mathematica can help to bring the formulas in the textbooks to life and make them more vivid and compelling to the students.

つまり、「人的資本の欠如 (lack of human capital)」という言葉で意味した「経済学徒の数学的な素養の欠如」を、コンピュータという物理的資本をもって代替 (substitute) しようというわけである。

もちろん彼は、コンピュータが（経済分析における）数理的問題をすべて自動的に解いてくれることを期待しているのではなく、数式処理ソフトの活用が経済学における数理的分析のコストを引き下げ (lowering the cost of doing mathematical analysis), 学生は経済分析そのものに、より一層注力を傾けることができるという、きわめて経済学的な意味合いを強調しているということに留意されたい。

だが、そもそもなぜそこまで数式処理ソフトを使ってまでも数学にこだわるのかという論点が欠けているように思われるが、それは、Stroyan[40]が *CALCULUS Using Mathematica* のなかで述べているように、“Calculus is primarily important because it is the language of science.”という言葉に集約されるであろう。つまり、(社会科学としての経済学を含む) 科学を厳密に語る言語として、数学を利用することが必要であるということである。

さらに、『はじめよう経済学のためのMathematica』において、浅利 他[2, p. i] は経済学における数学の意義を以下のように述べている。

経済学が数式やグラフなどの数学的方法を用いる理由は、経済学をわざわざ「難しく」するためではありません。むしろその反対だといえます。数学的な方法を用いることにより理論の内容を厳密かつ明確に叙述し、またグラフや図解などにより視覚的・直感的にも理解しやすい形で理論を提示します。

一方、数学の理解に本当に数式処理は必要なのか、もしかして学生が数式処理ソフトに頼り切りになってしまうのではないか、という懸念については、*MATHEMATICA for Microeconomics*の中でのStinespring[39, p. x]の指摘に耳を傾けてみたい。

Whether solving particular problems first by hand and then testing them against the computer results or using the computer to create a general solution procedure, economic students who see their field becoming increasingly mathematical will find Mathematica to be an excellent teacher.

つまり、学生が自分の手で解いた問題の結果を、数式処理ソフトの出力とくらべてみたり、コンピュータの計算能力を借りて、通常の手順では難しい一般的な解を導出してみたりすることによって⁶⁾、数式処理ソフト（上の場合は*Mathematica*）をあたかも自分の家庭教師にすることができるというのである。

簡潔にまとめれば、与えられた手順に従えばコンピュータが解答を教えてくれるという受動的な学習態度ではなく、コンピュータで解答を求める道筋を自らが能動的に考えていくという態度を身につけることによって、学生ははじめて数式処理システムを有効活用できるということである⁷⁾。

3 経済学における数式処理ソフトの活用：サーベイ

本章では、経済学分野における数式処理ソフトの利用例を既存の書籍を参考にサーベイする。

Mathematica や Maple[28]といった代表的な数式処理ソフトの解説書および特定分野の応用書は、和書だけでもそれぞれ数十冊⁸⁾は下らないであろう。

6) 数学の定理などの証明で、「残りの導出は単純である」といって省略されている部分こそが、実際の手順的にはかなり複雑であることが多いのは、あまりにも皮肉である。

7) こうしたコンピュータの活用形式が重要であるということについて、パパート[33]はわれわれに深い洞察を与える。

8) amazon.co.jp (<http://www.amazon.co.jp/>) で検索してみたところ、*Mathematica*で91冊、Mapleで21冊検索された。もちろん、すでに絶版のものや、表題や概要にこ

これに洋書を入れるならばればその数が数百冊を越えるのは確実である。しかしながら、こと経済学の分野におけるその応用例は以外に少ない。以下はそのなかでも筆者が代表的なものとしてピックアップしたものである。

Varian, *Economic and Financial Modeling with Mathematica* (1992)

経済学分野における数式処理システムの利用を最初に扱った研究叢書。経済学に初めて数式処理システムの活用を紹介したという意義は大きい。

ただし、想定する読者として、数式処理システム (*Mathematica*) をある程度マスターしている経済学研究者を対象としており、大部分の収録論文は、経済学における数理分析に、いかに *Mathematica* を効率的に応用するかを主眼として書かれている。学部学生が理解できるようなモデルの基礎的解説は省略されている。また、その適用範囲は、ミクロ経済学（一般均衡，ゲーム理論），マクロ経済動学，数理ファイナンス，および計量経済学，と非常に幅広いものとなっている。

なお、多くの分析例について、その著者が開発した独自のパッケージを利用しているが、そのパッケージのプログラム手法についての解説はほとんど論文中に含まれておらず、数式処理システムおよびその主要なプログラミング手法である関数プログラミングに慣れていない初心者には敷居の高い書物であろう。

なお、同様なコンセプトでもって同編著者でまとめられた書籍に、Varian, *Computational Economics and Finance: Modeling and Analysis With Mathematica* [48]がある。

小林, *Mathematica* による『ミクロ経済学』スタディガイド (1995)

小林[24]は、おそらく和書としてはじめて、数式処理システム(*Mathematica*)を本格的に経済分析に活用した書物である。

これらのキーワードを含まずサーチに漏れた書籍等を含めれば、その数はもう少し大きなものになるであろう。

表1 小林道正『Mathematicaによる『ミクロ経済学』
スタディガイド』目次)

1. Mathematicaの基本
2. 効用関数と消費者需要
3. 消費者需要の比較静学
4. 生産関数と企業行動理論
5. 費用関数と企業行動理論

内容としては、西村和雄の『ミクロ経済学』[31]のスタディガイドという体裁をとっており、西村の前半基礎的部分の重要式の導出、および多数のグラフによるモデル体系の視覚化をおこなっている。特に、この経済モデルの徹底したビジュアル化という部分が、従来の経済学教科書にない特質である。

本書の目次は表1の通りである。この目次からもわかるように、学部上級レベルの伝統的ミクロ経済学の基礎部分を忠実に扱ったものである。

なお、著者が本文中で他のMathematicaの一般的参考書をすすめていることからわかるように、Mathematica コマンド（組込み関数）の説明は必要かつ最小限に押さえられているため、この本だけで数式処理システムの操作法を十分に理解することは多少困難なものと思われる。

浅利 他，はじめよう経済学のためのMathematica (1996)

浅利 他[2]は、学部生向け経済学啓蒙雑誌に連載していたものを（増補拡充し）まとめたものであり、経済理論と数式処理ソフトの双方に対して初心者である読者を対象に書かれている。経済動学の章を除き、通常の初、中級レベルでカバーされる経済学トピックをほぼカバーしているといつてよい。なお、統計分析および計量モデルのシミュレーションを扱っていることは、他の類書にあまりみられない特徴である。

ただし、表2の章立てからもわかるように、Mathematica の入門書を兼ねるといった本書の体裁上、経済数学のテキストのように、経済学トピックが数学理論に付随して説明されている場合が多い。

表2 浅利一郎 他『はじめよう経済学のためのMathematica』目次

1. Mathematicaの基礎
2. 関数とグラフ
3. 微分と積分
4. 最適化とその応用
5. 行列代数と線形モデル
6. 連立方程式モデルと比較静学
7. 経済動学(1) 定差方程式モデル
8. 経済動学(2) 微分方程式
9. 計量経済分析とシミュレーション

Huang and Crooke, *Mathematics and Mathematica for Economists* (1997)

Huang and Crooke[20]は、彼らが米国Vanderbilt大学において学部上級および修士の学生を対象にしておこなった「経済学のための数学 (mathematics for economists)」⁹⁾の講義がもとになっている。米国の大学教科書としては典型的な大きさかもしれないが、総ページ数が674もあり、先にあげた日本の参考書とくらべれば、並外れた大著ともいえよう。

表3からわかるように、内容としては、日本においては「経済数学」と呼ばれる講義の内容を隈なく網羅するものである。つまり、経済学に必要な数学的項目を学習効率的かつ整合的な順番に並べている。

この一冊を十分マスターすれば、学部および大学院修士レベルの経済学理論における数学的展開は、ほぼ難なく理解することが可能になるであろう。加えて、*Mathematica* コマンド（組込み関数）の解説も大変丁寧であり、他の*Mathematica* 参考書は必要ないものと考えられる。さらに、経済学に関連した例題および練習問題も豊富に付属している。これらの例題等を丁寧に追うことによって、学生は、インストラクターからの最小限の助力でもって、経済数学のマスターが可能となる。邦訳が是非とも待たれる一冊である。

9) 欧米の標準的な教科書としては、Simon & Blume[5] がある。

表3 Huang and Crooke, *Mathematics and Mathematica for Economists* 目次

1. Introduction to Mathematica
2. A Review of Calculus
3. Vectors
4. Matrices
5. System of Linear Equations
6. Eigenvalues and Eigenvectors
7. Real Quadratic Forms
8. Multivariable Differential Calculus
9. Taylor Series and Implicit Functions
10. Concave and Quasiconcave Functions
11. Optimization
12. Mathematica Programming
13. Ordinary Differential Equations
14. System of Differential Equations
15. Difference Equations

Stinespring, *MATHEMATICA for Microeconomics* (2002)

Stinespring[39]は、その副題にある“Learning by Example”の通り、学部上級および大学院修士レベルのミクロ経済学の内容を、学生が*Mathematica*とのインタラクティブな環境で学んでいくことを目的としている。

ひとつひとつのコマンド入力が、非常にコンパクトにまとまっており、冗長な計算式の展開によって見失いがちな経済学的含意の導出過程が、数学利用に不慣れな学生にも非常にわかりやすいかたちで提示されている。

表4からわかるように、本著はゲーム理論を除く、伝統的なミクロ経済学の内容をあますところなくカバーしている。またあまり扱われることのないミクロ的な動学理論の一部もカバーしている。

上にあげた小林の内容を補充し、より完全な形で数式処理ソフトによるミクロ経済学の探求を志す経済学学習者に是非ともすすめたい一冊である。

表 4 Stinespring, MATHEMATICA for Microeconomics 目次

1. Introduction
2. Consumer Choice and the Lagrangian Multiplier Method
3. Individual and Market Demand
4. Compensating and Equivalent Variation
5. Pure Exchange
6. Intertemporal Trade
7. Choice under Uncertainty and Imperfect Information
8. Cost Minimization
9. Short-Run and Long-Run Costs
10. Duality
11. Multiplant Production
12. Profit Maximization
13. Linear Programming
14. Production and Trade
15. Market Dynamics
16. Dynamic Optimization and the Calculus of Variations

統計学, ファイナンス, 社会シミュレーション

ここでは, 経済学コア理論以外の経済学関連分野, すなわち, 統計学, ファイナンス, および社会シミュレーション¹⁰⁾ における数式処理ソフト活用例について簡略にサーベイをおこなう。

まず, 数式処理ソフト(*Mathematica*)で統計と確率を扱ったものに, Abell [1], Hastings[22]およびRose[36]がある。内容のレベルは, Abell, Hastingsは学部上級, Roseは大学院・研究者向けである。エンドユーザが数理的な詳細にこだわらずに分析がおこなえるよう, 三者とも独自パッケージを作成し, 多数の統計用関数を提供している。特に, オンハンドのインタラクティブなシミュレーションを確率・統計学習に生かすためには非常に参考となる文献である。

Prisman[34]は, 数式処理ソフト(Maple V)をファイナンス分野に活用した,

10) さまざまな社会現象の, 要因, 特徴を探る社会科学分野におけるコンピュータシミュレーション。この分野における研究者向けの包括的解説書としてGilbert & Troitzsch[12]がある。

この分野の米国でのベストセラーである。数式処理ソフトが（速度的に）不得意であるとされる数値解析の部分は、Matlab[29]（行列言語）と連携することによって、その問題点を解消している。また、ファイナンス分野を含んだ多様な最大化問題を多くの実例を用いて詳細に扱ったものとして、Bhatti [4]がある。特に、数式処理ソフトが不得意とされている不等式制約が付いた最大化問題を多く扱っていることは注目される。さらに、吹春[9]は、その内容の多くが日本における証券投資理論の基本テキストの定番、榊原 他 [37]『証券投資論（第3版）』の数学的解説であると筆者が述べているように、ファイナンスに関連した数学分野（確率、微積分、行列）およびその経済学的例題を数式処理ソフトによって解説したものである。昨今の学生の実務指向を考慮すれば、その重要性は看過できないものと考えられる。

Gaylord & D'Andria[11]は、*Mathematica*によって、最近注目を浴びているエージェントベースの人工社会モデルを構築したものである。エージェントベースモデルは、豊富なクラスライブラリを利用しながら、オブジェクト指向言語によって構築されるのが普通である。その複雑なプログラミングを、芸術的とも言える関数プログラミングと *Mathematica* の強力なグラフィック機能で実現しているのは、著者の並外れた発想力のなせる業であるといっても過言ではないであろう。一方、河野 他[23]は、投票行動などの様々な社会現象のシミュレーションを、数式処理ソフト(*Mathematica* および *Maple V*)によって実現したものである。*Misrosoft Excel* を併用し、学部生にもわかりやすいレベルで、コンパクトかつ要点をついた説明をおこなっている。

4 商用ソフトから *Maxima* へ

ひと頃は大きいもてはやされた数式処理ソフトであるが、残念ながら最近の経済学教育の場で縦横に活用されているといったような話はあまり聞かなくなってきた。その理由として筆者が考えるのは、以下の通りである。

販売価格の上昇 限られた予算内で、価格に見合った教育効果を得ることができるのかという懸念。

コマンド群の増加 あまりにもソフトが高度化してしまい、経済学学習の円滑化というものが脇に置かれ、数式処理ソフトの習熟自体が自己目的化してしまうという問題。

ブラックボックス化 処理の簡便化を極端にすすめることにより、計算の過程があまりにも抽象化されてしまう問題。数式処理システムへの過度の依存性を生む危険。

安定性の欠如 ソフトの巨大化によるハードウェアスペック要求の増大。およびオペレーティングシステムとの親和性の欠如。

もちろん上の論点は、あらゆる数式処理ソフトがもつ絶対かつ致命的な問題点を指摘しているのではなく、多種の数式処理ソフトを相対的に評価した場合に個別的に浮かび上がる問題点である。

さらに、数式処理ソフト固有の問題点とは別に、こうした新しい教育手法を既存の講義体系に組込むことの難しさということが、そもそも数式処理ソフトの経済学教育への導入への最大の障壁となっている可能性も大きい¹¹⁾。

なお、一般的傾向として、学生の立場からみれば、数式処理ソフトの個人的入手の困難さという問題点は非常に大きなものと考えられる。講義もしくは付随的自宅学習における数式処理ソフトの利用頻度を考えれば、あえて高額な料金を払って自己購入することもなかろう。

しかしながら、インターネットの普及により、アカデミックな成果の社会資本化は加速度的に進展しつつある。特にGNU/Linux[25]の普及に代表されるフリーソフトウェアの隆盛は、必ずしも高価な商用ソフトがコスト・ベネフィット的に優れているわけではないという社会的認知を与えつつあるといえるだろう。

以下本章では、*Maxima*というフリーの数式処理システムに焦点をしぼり、その活用法を論じることにより、数式処理システムの経済学教育・学習への

11) 数式処理ソフトの利用とは多少方向性が異なるが、表計算ソフトによる数値解析的分析を経済学教育へ取り入れた、田中 他[42,43]の『マクロ経済分析 -- 表計算で学ぶ経済学』および『ミクロ経済分析 -- 表計算で学ぶ経済学』は、コンピュータ利用による新しい経済学教育手法の導入という意味で注目に値する。

再導入を提言したい。

4.1 *Maxima*とは

数式処理ソフトにも多数のフリーソフトウェアが存在する。*Maxima*はそのなかでも、もっとも機能的にすぐれたもののひとつである。

*Maxima*の前身となるDOE Macsymaは、1969年から1982年にわたってマサチューセッツ工科大学で開発、維持された。その後、そのメンテナンスの権利を得た一人であるテキサス大学の数学者Willam Schelterにより、1982年から彼がロシアで急死する2001年まで、その個人的な尽力によってMacsymaの一変種として*Maxima*のメンテナンスが続けられた。

なお、DOE Macsymaは、1982年から1992年までは、Symbolic, Incによって商業の開発が継続され、1992年以降はMacsyma Incによる改良サポートを受けながら製品版Macsymaの販売がおこなわれていた。特にグラフィック機能の強化、さらにはアドオンパッケージやノートブック機能(Windows版)の追加などに特徴がある。しかしながら、1999年末以降は明らかにMacsymaの市場供給は絶たれており、Macsyma IncのWebサイトも閉鎖されている。

ただ、不幸中の幸というべきか、Schelterは、1998年にDOE MacsymaのソースコードをGPL¹²⁾で配布することを認められており、彼の亡き後、商用Macsymaの消滅もあいまって、GPL化されたMacsyma、つまり*Maxima*の開発は、ボランティアベースのオープンソースコミュニティによって、従来よりもより一層活発なものとなっている。

なお、*Maxima*は生まれて間もないオープンソースソフトウェアだけあって、入手できる参考書は、付属のマニュアル以外はほとんど皆無といってよい。以下では、DOE Macsymaという同一の祖先をもつ商用Macsymaの市販マニュアル[26, 27]を主要な参考文献とし、*Maxima*でも操作可能な部分

12) GPL(Gnu General Public License)とその背景となる思想については、GNUのWebサイト[17]を参照のこと。

の応用例を参照しながら、この *Maxima* の経済学分野での活用例を紹介したい。

4.2 実例：消費者理論

では、実際に経済学分野の数理的例題を *Maxima* で解いてみよう。ここでは、米国の標準的中級教科書 Varian[49]、Nicholson[30] のレベルに沿って、消費者理論における予算制約付き最大化問題を例題とする¹³⁾。

まず、消費者の効用をコブ・ダグラス型関数 (utility) として定式化する。財の種類は2つ $\{x, y\}$ とし、それぞれの価格を $\{p_x, p_y\}$ とおく。この消費者の予算を m とすると、予算式は constraint によってあらわすことができる。

Maxima

```
utility: x^alpha*y^(1-alpha);
```

```
constraint: m-px*x-py*y;
```

— T_EX Output —

$$x^\alpha y^{1-\alpha} - p_y y - p_x x + m$$

これを条件付き最大化問題として定式化するために、ラグランジュ関数(1)を設定する。

Maxima

```
l: utility+mu*constraint;
```

— T_EX Output —

$$x^\alpha y^{1-\alpha} + \mu(-p_y y - p_x x + m)$$

13) 上の文献紹介であげた小林第3章、浅利 他第6章、およびStinespring第2章、では、同様な例題を *Mathematica* を利用して解いている。興味のある読者はここでの実例と比較対象されたい。

最大化のための1階の条件（必用条件）は、上の1を $\{x, y, u\}$ についてそれぞれ偏微分 (diff) して0とおくことである。

Maxima

```
foc1: diff(l,x);
foc2: diff(l,y);
foc3: diff(l,mu);
```

TeX Output

$$\begin{aligned} & \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} - \mu p_x \\ & \frac{(1-\alpha)x^\alpha}{y^\alpha} - \mu p_y \\ & - p_y y - p_x x + m \end{aligned}$$

これを、 $\{x, y, \mu\}$ について解く (solve) と¹⁴⁾、財の配分割合はパラメータ α によって決定されること、2財の価格の交差弾力性が0である¹⁵⁾ことが容易にわかる。

Maxima

```
sols: solve([foc1, foc2, foc3], [x, y, mu]);
```

TeX Output

$$\left[\left[x = \frac{\alpha m}{p_x}, y = -\frac{(\alpha-1)m}{p_y}, \mu = \frac{(\alpha^\alpha - \alpha^{\alpha+1})m^\alpha}{p_x^\alpha \left(-\frac{(\alpha-1)m}{p_y} \right)^\alpha p_y} \right] \right]$$

例えば、具体的に $\{\alpha=5, p_x=2, p_y=2, m=100\}$ という数値を代入してみると、以下のような財の配分が導き出される。

14) *Maxima* で右辺が0の等式（体系）を解く場合、それを明示的に記述する必要はない。

15) 計量的にはあまり現実的ではない性質である。

Maxima

```
sols2: sols,alpha:0.5,px:2,py:2,m:100;
```

TEX Output

$$\left[\left[x = 25.0, \ y = 25.0, \ \mu = 0.25 \right] \right]$$

最大化のための2階の条件（十分条件）は、以下の縁付きヘッセ行列 (b_hessian)の行列式の値¹⁶⁾ (det)が正であることである¹⁷⁾。

Maxima

```
muu: diff(l,mu,2)$
mux: diff(l,mu,1,x,1)$
muy: diff(l,mu,1,y,1)$
mxx: diff(l,x,2)$
mxy: diff(l,x,1,y,1)$
myy: diff(l,y,2)$
b_hessian: matrix([muu,mux,muy],[mux,mxx,mxy],[muy,mxy,myy]);
det: ratsimp(determinant(b_hessian));
```

TEX Output

$$\begin{pmatrix} 0 & -px & -py \\ -px & (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}y^{1-\alpha} & \frac{(1-\alpha)\alpha x^{\alpha-1}}{y^\alpha} \\ -py & \frac{(1-\alpha)\alpha x^{\alpha-1}}{y^\alpha} & -(1-\alpha)\alpha x^\alpha y^{-\alpha-1} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{y^{-\alpha-1}((\alpha^2-\alpha)py^2x^\alpha y^2 + (2\alpha^2-2\alpha^2-2\alpha)pxpyx^{\alpha+1}y + (\alpha^2-\alpha)px^2x^{\alpha+2})}{x^2}$$

上の一般形では、正負がはっきりしないので、価格および財は正の値をと

16) ヤコビアンとも呼ぶ。

17) コマンド末にある\$は結果の出力を抑制する。

ること, および配分パラメータ α の値も通常の範囲内にあることを仮定する (assume)。

Maxima

```
assume(px > 0, py > 0, x > 0, y > 0);
assume(0 < alpha, 1 > alpha);
```

TeX Output

$$\left[px > 0, py > 0, x > 0, y > 0 \right]$$

$$\left[\alpha > 0, \alpha < 1 \right]$$

すると, この行列式の値は正であることが示され, 極大値の十分条件が証明される。

Maxima

```
is(det > 0);
```

TeX Output

true

極大値における $\{x, y\}$, つまりそれぞれの財の (マーシャリアン) 需要関数を, $\{x_star, y_star\}$ として, 1 階の条件の解の集合 (sols) から抜き出してみる。

Maxima

```
x_star: map(rhs,sols[1])[1];
y_star: map(rhs,sols[1])[2];
```

TeX Output

$$\frac{\alpha m}{px}$$

$$-\frac{(\alpha-1)m}{py}$$

なお,

$$\begin{aligned}\text{価格効果} &= \frac{\partial x}{\partial px} = \text{代替効果} + \text{所得効果} \\ &= \frac{\partial x}{\partial px} \Big|_{v=\text{constant}} - x \frac{\partial x}{\partial m}\end{aligned}$$

であるから, この x 財(x_{star})の価格効果 (price_effect), 所得効果 (price_effect), および代替効果 (substitution_effect) は, それぞれ以下のように導出される。

Maxima

```
price_effect: diff(x_star,px);
income_effect: -x_star*diff(x_star,m);
substitution_effect: ratsimp(price_effect - income_effect);
```

TEX Output

$$\begin{aligned}& -\frac{\alpha m}{px^2} \\ & -\frac{\alpha^2 m}{px^2} \\ & \frac{(\alpha^2 - \alpha)m}{px^2}\end{aligned}$$

4.3 ユーザビリティ

上の簡単なセッションをもとに*Maxima* のユーザビリティ¹⁸⁾ (使いやすさ) について簡単にコメントを加えてみたい。

インターフェイス

18) ソフトウェア等におけるユーザビリティの厳密な定義については, 例えば [usability.gr.jp\[45\]](http://usability.gr.jp[45]) を参照のこと。

*Maxima*はTcl/Tk[44]ベースのxmaximaという、他の商用数式処理ソフトのものによく似たノートブックインターフェイスを持つが、ユーザのコメントを書き加えたり、再編集する機能を持たない。ただし、いくつかの外部プログラムを使えば、ノートブックのように自己のコメントとともにセッションを保存したり、セッション終了後に再編集することが可能である。例えば、GNU TeXmacs[16]や imaxima[19]を使えば、WYSIWYG 画面¹⁹⁾で TeX 文書のなかに *Maxima* のセッションを埋め込むことができる²⁰⁾。また、*Maxima* 付属のEMaxim²¹⁾を利用すれば、シームレスにTeX 文書に *Maxima* セッションを組み込むことが可能である。ちなみに、本稿はこの *EMaxima* を利用して編集されている。

グラフィック機能

Maxima 本体は2Dおよび3Dの基本的描画機能を持つが、ミクロ経済学における無差別曲線などで頻繁に利用される、等高線グラフィックスをうまく描く機能を持たない。ただし、*Maxima* は独自の Tcl/Tk インターフェイスを利用したグラフィックモジュールの他に、数種の外部グラフ作成ツールが利用可能である。例えば、gnuplot[15]をそのグラフ作成に使えば、その描画コマンドを利用することにより、等高線表示が可能になる。すべての処理を一括におこなうグラフ表示のバッチ処理は不可能になるという弱点はあるが、不得意な機能を外部ツールにまかせ、ソフトの巨大化、非効率化を防ぐというUNIX哲学[10]にはかなっており、全体的な評価は賛否がわかれるところである。

図1は*Maxima* によるグラフ表示の一例である。グラフィックスのオーバーレイ処理も非常に簡単におこなうことが可能である。

19) imaxima の場合は、数式部分のみグラフィック表示。

20) ただし、現状では漢字等の2バイト文字を扱うことができないので、学部レベルの経済学学習には不都合かもしれない。

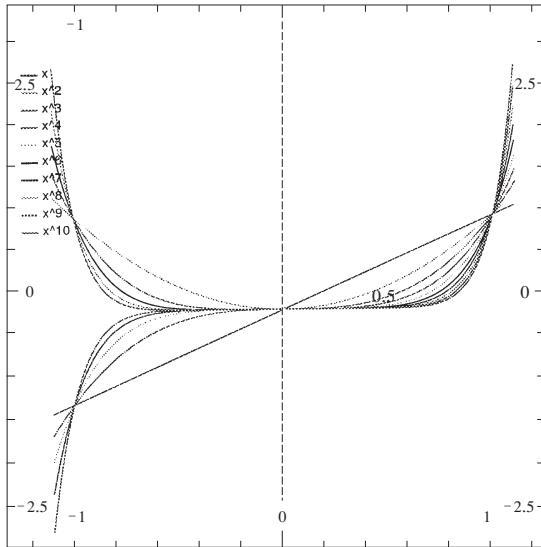
21) Emacs[14]用elispで書かれたmaximaメジャーモード。Donald Knuthのliterature programにコンセプトを似せている。

図 1：グラフ表示例

コマンド入力：

(C1) makelist(xⁿ,n,1,10);

(C2) plot2d(%,[x,-1.1,1.1]);



ライブラリおよびプログラミング

Maxima の祖先にあたる *Macsyma* は30年以上の歴史を持つものの、商用数式処理ソフトウェア²²⁾の隆盛の陰で一般的な普及は遅れていた。しかしながら、1998年のフリーソフトウェア化を契機として、その開発とライブラリの拡充は急ピッチで進んでいる。

さらに、多くの数式処理システムの文法体系（関数プログラミング）が互いに類似していることもあり、既存の商用数式処理ソフトのライブラリを *Maxima* に移植することはそれほど難しくない²³⁾。

22) Mathematicaをはじめ、その多くが DOE Macsymaを手本にしてつくられていることは良く知られている事実である。

23) ライセンス問題に抵触しない範囲内で、ということは当然の常識である。

表5 ニュートン法の *Maxima* プログラム

```

(C1) newton(func,guess):=block(
    [numer,y],
    local(df),
    numer:true,
    define(df(x),diff(func(x),x)),
    do (y:df(guess),
        if y=0.0 then error("derivative at :",guess," is zero."),
        guess:guess-func(guess)/y,
        if abs(func(guess))<1.0e-5 then return(guess)))$
(C2) cubic(x):=x^3-8.0$
(C3) newton(cubic,100);
(D3)                                     2.0000000273168

```

また、商用ソフトウェアの場合、そのサポートベンダーがソフト開発を中止してしまった場合に、それに付随するソフトウェア資産がユーザコミュニティに引き継がれる可能性は皆無といってよいが、*Maxima* のようなフリーソフトウェアでは、開発者（ヘビーユーザが兼ねている場合が多い）のボランティアベースの開発の意思が失われない限り、その知的遺産が消滅していくことはないということを理解しておくことも重要であろう。

表5にあるプログラムリストは、Clarkson[6]を参考に、ニュートン法で一変数の方程式の解を求める *Maxima* プログラムである。詳しい文法の説明はClarksonを参考にして欲しいが、blockステートメントやlocalステートメント²⁴⁾を使うことにより副作用の少ない関数プログラミングが可能となっている。

5 まとめと課題

本稿は、数式処理システムの経済学学習における利用法について概観し、経済学分野における数式処理システム利用の解説書についてサーベイをおこ

24) それぞれ、局所変数、局所関数の設定を可能にする。

なった。さらに、オープンソースソフトウェアの数式処理システム、*Maxima* を取り上げ、その経済学学習への利用可能性について考察した。

本質的ではない冗長な計算をコンピュータにまかせたり、自分の数式展開とコンピュータの結果をくらべたりと、数式処理ソフトの経済学学習における活用により、学習者は、問題の定式化、および導出された命題の現実妥当性（反証可能性）に、より注意を払うことが可能となる。それは、結果として、経済学の本質の理解へと学習者を導くだろう。

しかしながら、数式処理ソフトの価格高騰およびコストパフォーマンスの欠如は、その一般的普及を妨げている。筆者は、そうした問題に対処するために、無料のフリーソフトウェアを利用してみることも一案足りうることを本稿で示した。ここで紹介した *Maxima* は、用途により多少の機能的拡充が求められるものの、商用ソフトウェアにも勝るとも劣らない実用性と機能を持つことが理解されたであろう。

今後の筆者の個人的課題として、この *Maxima* を利用した、経済学分野の例題集、経済モデルテンプレートを開発していくことを計画している。もちろんこうした教材は、紙の媒体のみならず、電子的媒体を提供することによってユーザの利便性を向上させることが必要である。筆者は大学内部、外部からのサポートを募りながら、こうして豊富にそろえた教材、研究素材を、コンピュータ経済学 (Computational Economics) ポータルサイトの開設によって、広く提供していくことを計画している。識者からの広い意見を希望する。

付録A *Maxima* の入手およびインストール方法

A1. 入手方法

本文中に述べたように、*Maxima* はGPLにもとづくライセンスで一般配布されている。つまり、オープンソースソフトウェアの形態で誰もが自由にソースを入手し改変することを許されている。GPLソフトウェアは必ずしも無料である必然性はないが、他の大部分のGPL化されたソフトウェアと同じ

く、無料で配布されている。*Maxima* の最新版²⁵⁾ は、そのオフィシャルWeb サイト：

● <http://maxima.sourceforge.net/>

からリンクをたどることによって入手可能である。

なお、筆者が本稿で利用した*Maxima* は、開発版のスナップショットでもあるCVS レポジトリからダウンロードし、自らコンパイルしたものを利用した。CVS からのソースの入手方法については、上に記したオフィシャル Web ページにその方法の記述がある。

A2. 動作環境およびインストール方法

最新版の*Maxima* は、Common Lisp[18]の環境を前提とする。したがって、ANSI Common Lisp が動く環境であるならば、どのプラットフォームを利用しても問題はないはずである²⁶⁾。しかしながら、*Maxima* のソースコードを読む限り、動作元のターゲットとなっているCommon Lisp は、CLISP[7]、GCL[13]、およびCMUCL[8]に限られているようである。したがって、これらのCommon Lisp 処理系が安定しているプラットフォームならば動作する可能性が高いといえるだろう。

なお、筆者が*Maxima* ML²⁷⁾からの情報で知る限り、CLISPと*Maxima*の組み合わせが一番安定的に動作するようである。ちなみに本稿での筆者の*Maxima* 利用環境は、RedHat 7.3[35]およびVine 2.5CR[46](GNU/Linux)である。

インストールの仕方は、通常のGNUソフトウェア²⁸⁾と同様で、

```
$ ./configure
```

```
$ make
```

25) 現在の最新版は、5.9.0rc1 である。

26) これに加えてGUIフロントエンドとグラフィック処理が必要な場合はTcl/Tk8.0 以上が必要である。

27) *Maxima* のオフィシャルサイトにて加入することができる。

28) autoconf, automakeで作成されたもの。

\$ sudo make install

で完了する。

参 考 文 献

- (1) Abell, Martha L., Braselton, James P, and John A. Rafter, *Statistics by Mathematica*, Academic Press, 1998.
- (2) 浅利一郎 他, 『はじめよう経済学のためのMathematica』, 日本評論社, 1997年。
- (3) Ben-Israel, A. and R. Gilbert, *Computer-Supported Calculus*, Spriger, 2002.
- (4) Bhatti, Asghar M., *Practical Optimization Methods with Mathematica Applications*, Springer, 1998.
- (5) Simon, P. Carl, and Lawrence Blume, *Mathematics for Economists*, 1994, Norton.
- (6) Michael Clarkson, *DOE-Maxima Reference Manual*, <http://starship.python.net/crew/mike/>
- (7) CLISP -- an ANSI Common Lisp, <http://clisp.sourceforge.net/>
- (8) CMUCL Home Page, <http://www.cons.org/cmucl/>
- (9) 吹春俊隆, 『Mathematicaによる経済数学入門』, 牧野書店, 2002年。
- (10) Gancarz, Mike, *The Unix Philosophy*, Butterworth-Heinemann, 1996.
- (11) Gaylord Richard J. and Louis J. D'Andria *SIMULATING SOCIETY*, Springer, 1998.
- (12) Gilbert, G. Nigel, and Klaus G. Troitzsch, *Simulation for the Social Scientist*, Open University Press, 1999.
- (13) GCL -- GNU Project, <http://www.gnu.org/software/gcl/gcl.html>
- (14) GNU Emacs, <http://www.gnu.org/software/emacs/emacs.html>
- (15) Gnuplot Central, <http://www.gnuplot.info/>
- (16) GNU TeXmacs home page (FSF GNU project), <http://www.texmacs.org/>
- (17) GNU's Not Unix! -- the GNU Project and the Free Software Foundation, <http://www.gnu.org>
- (18) Graham, Paul, *ANSI Common Lisp*, Prentice Hall, 1996.
- (19) imaxima, <http://www.ifa.au.dk/~harder/imaxima.html>
- (20) Huang, Cliff J., and Philip S. Croke, *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell, 1997.
- (21) Kawai, Katsuhiko, "A Computable General Equilibrium Model in an Overlapping Generation Framework: Using Mathematica for CGE with Application to the Japanese Economy," *Journal of Economics and Management*, Nagoya University of Commerce

- and Business Administration, Vol.40, No.2 pp.81- 96. March, 1996.
- (22) Hastings, Kevin *INTRODUCTION TO Probability with Mathematica*, Chapman & Hall/CRC, 2001.
 - (23) 河野光雄, 佐野健一, 『社会現象の計算機実験』, 中央大学出版部, 1996年。
 - (24) 小林道正, 『Mathematicaによる『ミクロ経済学』スタディガイド』, 東洋経済新報社, 1996年。
 - (25) 日本のLinux 情報, <http://www.linux.or.jp/>
 - (26) Macsyma Inc. *Macsyma -- Mathematics and System Reference Manual, 16th edition*, 1996.
 - (27) Macsyma Inc. *Macsyma -- User's Guide A Tutorial Introduction, second edition*, 1995.
 - (28) Waterloo Maple Inc., <http://www.maplesoft.com/>
 - (29) The MathWorks, <http://www.mathworks.com/>
 - (30) Nicholson, Walter, *Microeconomic Theory - Basic Principles and Extensions, 8th Edition*, Dryden, 2001.
 - (31) 西村和雄, 『ミクロ経済学』, 東洋経済新報社, 1990年。
 - (32) Octave Home Page, <http://www.octave.org/>
 - (33) Papert, Seymore, *MINDSTORMS*, Basic Books, 1980. (邦訳) シーモア・パパー
ト, 奥村貴世子訳, 『マインドストーム』, 未来社, 1982年。
 - (34) Prisman, Eliezer Z. *Pricing Derivative Securities - An Interactive Dynamic Environment with Maple V and Matlab*, Academic Press, 2000.
 - (35) Red Hat-Linux, Embedded Linux and Open Source Solution, <http://www.redhat.com/>
 - (36) Rose, Colin, and Murray D. Smith, *MATHEMATICAL STATISTICS with Mathematica*, Springer, 2002.
 - (37) 榎原茂樹 他, 『証券投資論』, 日本経済新聞社, 1998年。
 - (38) Scilab Home page, <http://www.scilab.org/>
 - (39) Stinespring, John Robert, *MATHEMATICA for Microeconomics: Learning by Example*, Academic Press, 2002.
 - (40) Stroyan, K.D., *CALCULUS Using Mathematica*, Academic Press, 1993.
 - (41) Stroyan, K.D., *CALCULUS Using Mathematica -- Scientific Projects and Mathematical Background*, Academic Press, 1993.
 - (42) 田中利彦 他, 『マクロ経済分析 -- 表計算で学ぶ経済学』, 中央経済社, 1995年。
 - (43) 田中利彦 他, 『ミクロ経済分析 -- 表計算で学ぶ経済学』, 中央経済社, 1995

年。

- (44) Tcl Developer Site, <http://www.tcl.tk/>
- (45) U-Site, <http://www.usability.gr.jp/>
- (46) Vine Linux Home Page, <http://www.vinelinux.org/>
- (47) Varian, Hal R., *Economic and Financial Modeling with Mathematica*, Springer-Verlag, 1992.
- (48) Varian, Hal R. *Computational Economics and Finance: Modeling and Analysis With Mathematica*, Springer-Verlag, 1996.
- (49) Varian, Hal R. *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach, 6th Edition*, WW Norton & Co, 2002.
- (50) Wolfram Research, Inc., <http://www.wolfram.co.jp/>

(かわい・かつひこ／経済学部助教授／2002年10月31日受理)